

# ESTIMATION NUMERIQUE DE LA CONVECTION TURBULENTE DANS LES ESPACES ANNULAIRES

J. GOSSE et R. SCHIESTEL  
 Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France

(Reçu le 19 Février 1975)

**Résumé**—Un schéma théorique, appliqué au cas des espaces annulaires, permet la prévision numérique du transfert de quantité de mouvement, de chaleur ou de masse dans l'écoulement turbulent. En particulier il rend compte de l'existence de la zone de "production négative" d'énergie. Le nombre de Nusselt, sur le cylindre intérieur, est donné sur une plage étendue de nombres de Prandtl et pour diverses valeurs du rapport du rayon intérieur au rayon extérieur des tubes.

## NOMENCLATURE

- $A_0, A_1, B_1, A_s, A_{sq}, A_L, \omega, a, b, \Delta, \beta, \zeta, \eta, \alpha, \chi, \gamma$ , constantes numériques du modèle;
- $C_p$ , chaleur spécifique à pression constante;
- $D_t$ , coefficient de diffusivité thermique turbulente;
- $d_H$ , diamètre hydraulique;
- $\mathcal{E}(k, x, t)$ , spectre moyen d'énergie turbulente;
- $E$ , taux de dissipation d'énergie turbulente ( $v \overline{v'_{i,j} v'_{i,j}}$ );
- $E_{ij}$ , taux de dissipation du tenseur de Reynolds ( $v \overline{v'_{i,k} v'_{j,k}}$ );
- $g$ , rapport des rayons dans l'espace annulaire  $g = r_1/r_2$ ;
- $h$ , demi-distance entre plaques planes, rayon du tube ou épaisseur de l'espace annulaire;
- $H$ , enthalpie spécifique;
- $j_0$ , densité de flux de chaleur pariétal;
- $k$ , nombre d'onde;
- $L$ , échelle intégrale;
- $Nu$ , nombre de Nusselt ( $\alpha_j d_H / \lambda$ );
- $Pr$ , nombre de Prandtl ( $C_p \mu / \lambda$ );
- $Pr_t$ , nombre de Prandtl turbulent ( $v_t / D_t$ );
- $q$ , énergie cinétique moyenne des fluctuations de vitesse ( $\frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j}$ );
- $r_1, r_2$ , rayons intérieur et extérieur de l'espace annulaire;
- $\hat{r}$ , rayon à la position du maximum de vitesse moyenne;
- $r_0$ , rayon au point d'annulation de la contrainte de cisaillement turbulent;
- $R_{ij}$ , tenseur de Reynolds ( $\overline{v'_i v'_j}$ );
- $Re$ , nombre de Reynolds ( $V d_H / \nu$ );
- $s$ , microéchelle de turbulence;
- $\hat{s}, s^*$ ,  $\hat{s} = (\hat{r} - r_1)/(r_2 - \hat{r})$ ;  $s^* = (r_0 - r_1)/(r_2 - r_0)$ ;
- $T$ , température absolue;
- $T_f$ , température moyenne du fluide;
- $T_p$ , température de paroi;
- $T_{ijk}$ , corrélations triples de vitesse ( $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ );
- $v_i, v'_i$ , composante générale de vitesse, fluctuation de cette composante;
- $v_*$ , vitesse de frottement;
- $V$ , vitesse moyenne du fluide dans une section;
- $x_i$ , coordonnées d'espace.

## Lettres grecques

- $\alpha_j$ , coefficient de transfert de chaleur ( $j_0 / (T_p - T_f)$ );
- $\varepsilon_t$ , diffusivité turbulente ( $AL \sqrt{q}$ );
- $\lambda$ , coefficient de conductivité thermique;
- $\lambda_*$ , coefficient de perte de charge ( $\frac{2}{V^2} \left( \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_1} \right)$ );
- $\nu$ , viscosité cinématique;
- $\pi$ , rapport pression/masse volumique constante;
- $\rho$ , masse volumique;
- $\Gamma$ , gradient de pression réduit ( $\frac{h^3}{\nu^2} \left( \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_1} \right)$ ).

## 1. INTRODUCTION

SUR LA base d'un schéma théorique [1] qui permet la description du mouvement turbulent à l'aide d'un système d'équations de transport des corrélations doubles de Reynolds et d'équations d'évolution de deux échelles efficaces indépendantes de turbulence, des procédures simplifiées de prévision numérique ont été développées et ont fait l'objet d'applications diverses à des écoulements cisailés simples.

Ces modèles simplifiés ont permis d'obtenir un certain nombre de résultats sur les écoulements établis en conduites, dans un tube circulaire et entre plaques planes parallèles [2, 3]. Les profils de vitesse moyenne ont pu être calculés jusqu'à la paroi même de la conduite, le schéma introduit permettant le calcul de la sous-couche visqueuse adjacente à la paroi. Les écoulements à faible niveau de turbulence ont également été traités. Deux solutions distinctes, l'une laminaire, l'autre turbulente ont pu être obtenues dans ce domaine suivant le niveau initial de turbulence, cette particularité a été interprétée comme représentative du phénomène de transition [4]. Le transfert de chaleur par métal liquide dans les conduites a été traité [2], mais l'emploi de ce schéma simplifié n'a pu être étendu aux fluides à nombres de Prandtl élevés [3].

Le modèle complet, parce qu'il comprend un ensemble d'équations de transport des corrélations de

Reynolds ne souffre pas des limitations inhérentes au concept de viscosité turbulente. De plus, ce niveau de fermeture qui est nécessaire pour l'étude d'écoulements turbulents dans des géométries plus complexes permet une description plus détaillée du champ de turbulence et le transfert thermique peut être étudié sur une large plage de nombres de Prandtl.

Après avoir précisé la formulation mathématique du modèle complet, la présente étude consacrée à la convection turbulente dans les espaces annulaires, fait apparaître l'intérêt du modèle tridimensionnel à la fois du point de vue dynamique et du point de vue thermique, pour le calcul d'écoulements fortement dissymétriques.

Il convient de préciser que le modèle de turbulence ne vise pas à donner une conception nouvelle des mécanismes élémentaires de la turbulence mais que, de part la nature phénoménologique des hypothèses introduites, il doit être considéré comme un outil descriptif et prévisionnel justifié par son efficacité à résoudre les problèmes pratiques.

2. PRESENTATION DU MODELE TRIDIMENSIONNEL

Le mouvement turbulent détaillé d'un fluide newtonien est supposé être décrit par les équations de Navier-Stokes, complétées par l'équation de continuité, qui, dans le cas d'une évolution isovolume, s'écrivent:

$$\partial_t v_i + v_j v_{i,j} = -\pi_{,i} + \nu v_{i,jj} \tag{1}$$

$$v_{j,j} = 0. \tag{2}$$

La distinction entre mouvement moyen et mouvement fluctuant conduit aux classiques équations de Reynolds, ainsi qu'à l'équation d'évolution de la vitesse fluctuante.

$$\partial_t \bar{v}_i + \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} = -\bar{\pi}_{,i} + \nu \bar{v}_{i,jj} - R_{ij,j} \tag{3}$$

$$\bar{v}_{j,j} = 0 \tag{4}$$

$$\partial_t v'_i + \bar{v}_j v'_{i,j} = -v'_j \bar{v}_{i,j} - v'_j v'_{i,j} - \pi'_{,i} + \nu v'_{i,jj} + R_{ij,j} \tag{5}$$

$$v'_{j,j} = 0. \tag{6}$$

2.1. Equations de transport des corrélations doubles de vitesse

Le modèle original [1] comprend des équations de transport pour toutes les corrélations doubles de Reynolds obtenues directement à partir des équations (5) et (6) par un calcul élémentaire:

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ij} + \bar{v}_k R_{ij,k} &= -R_{ik} \bar{v}_{j,k} - R_{jk} \bar{v}_{i,k} + \overline{\pi'(v'_{i,j} + v'_{j,i})} \\ &\quad \text{production} \qquad \text{redistribution} \\ &\quad - T_{ijk,k} - \overline{(v'_i \pi')_{,j}} - \overline{(v'_j \pi')_{,i}} - E_{ij} \\ &\quad \text{diffusion turbulente} \qquad \text{dissipation} \\ &\quad + \nu R_{ij,kk} \\ &\quad \text{diffusion moléculaire.} \end{aligned} \tag{7}$$

Le second membre de cette équation générale contient un certain nombre de corrélations turbulentes inconnues exprimées sous forme de lois de comportement qui permettent de schématiser de manière globale les mécanismes physiques dont le détail demeure encore mal élucidé:

$$T_{ijk} = -A_1 L \sqrt{q} (R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j}) \tag{8}$$

$$\overline{v_i \pi'_i} = -B_1 L \sqrt{q} q_{,i} \tag{9}$$

$$E_{ij} = \nu R_{ij}/s^2. \tag{10}$$

L et s étant respectivement une échelle intégrale et une microéchelle de turbulence.

La formulation du terme de corrélation pression-gradient de vitesse regroupe plusieurs contributions [5]

$$\overline{\pi'(v'_{i,j} + v'_{j,i})} = \mathcal{P}_{ij}^{(1)} + \mathcal{P}_{ij}^{(2)} + \mathcal{P}_{ij}^{(3)} \tag{11}$$

$\mathcal{P}_{ij}^{(1)}$  est un terme analogue à celui déjà proposé par Rotta [6] et qui traduit la tendance à l'isotropie des agitations turbulentes.

$$\mathcal{P}_{ij}^{(1)} = -\frac{\xi}{2} \frac{\sqrt{q}}{L} \ell (R_{ij} - \frac{2}{3} q \delta_{ij}) \tag{12}$$

avec

$$\ell = \frac{A_0 L \sqrt{q}}{\nu + A_0 L \sqrt{q}}.$$

Le terme  $\mathcal{P}_{ij}^{(2)}$  favorise l'anisotropie dans les zones de forte inhomogénéité en particulier dans les zones de paroi et a été ainsi formulé.

$$\mathcal{P}_{ij}^{(2)} = -\eta \frac{\nu}{q^2} q_{,k} (R_{ik} q_{,j} + R_{jk} q_{,i} - \frac{2}{3} R_{kl} q_{,i} \delta_{ij}) \tag{13}$$

$\mathcal{P}_{ij}^{(3)}$  regroupe des termes correctifs proportionnels aux gradients de vitesse moyenne analogues à ceux utilisés par Chou [7], Rotta [6] et Naot [8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ij}^{(3)} &= -\gamma q (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \\ &\quad + \alpha (R_{ii} \bar{v}_{j,i} + R_{jj} \bar{v}_{i,j} - \frac{2}{3} R_{kl} \bar{v}_{k,i} \delta_{ij}) \\ &\quad + \chi (R_{ii} \bar{v}_{i,j} + R_{jj} \bar{v}_{j,i} - \frac{2}{3} R_{kl} \bar{v}_{k,i} \delta_{ij}). \end{aligned} \tag{14}$$

Compte tenu des hypothèses précédentes, l'équation de transport des corrélations  $R_{ij}$  prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ij} + \bar{v}_k R_{ij,k} &= -R_{ik} \bar{v}_{j,k} - R_{jk} \bar{v}_{i,k} + \mathcal{P}_{ij}^{(1)} + \mathcal{P}_{ij}^{(2)} + \mathcal{P}_{ij}^{(3)} \\ &\quad + A_1 \{ L q^{\frac{1}{2}} (R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j}) \}_{,k} \\ &\quad + B_1 \{ (L q^{\frac{1}{2}} q_{,i})_{,j} + (L q^{\frac{1}{2}} q_{,j})_{,i} \} - \nu R_{ij}/s^2 - \nu R_{ij,kk} \end{aligned} \tag{15}$$

2.2. Equation d'évolution de la microéchelle de turbulence

Deux échelles efficaces indépendantes de turbulence sont introduites, déterminées par des équations de transport différentes qui permettent de schématiser une turbulence dont le spectre peut varier non seulement en grandeur mais aussi en forme.

L'équation classique de transport du taux de dissipation d'énergie turbulente  $E = \frac{1}{2} E_{ii}$ , utilisé par Hirt [9], Daley et Harlow [10] puis par Hanjalic et Launder [11] sert de base au calcul de la microéchelle.

$$\begin{aligned} \partial_t E + \bar{v}_k E_{,k} &= -2\nu \overline{v'_k v'_{i,j} \bar{v}_{i,kj}} - 2\nu \overline{v'_{i,j} v'_{k,j} \bar{v}_{i,k}} \\ &\quad - 2\nu \overline{v'_{i,j} v'_{i,k} \bar{v}_{k,j}} - 2\nu \overline{v'_{i,j} v'_{k,j} v'_{i,k}} \\ &\quad - \nu \overline{(v'_k v'_{i,j} v'_{i,j})_{,k}} - 2\nu \overline{v'_{i,j} \pi'_{,ij}} \\ &\quad + 2\nu^2 \overline{v'_{i,j} v'_{i,jk}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Des hypothèses de fermeture analogues à celles introduites dans (7) sont formulées pour les corrélations du second membre de (16) [12].

De (16) et de la forme contractée de (10) on déduit aisément l'équation d'évolution de la microéchelle.

$$\begin{aligned} \partial_t(1/s^2) + \bar{v}_k(1/s^2)_{,k} &= -\omega \frac{R_{ij}}{s^2 q} \bar{v}_{i,j} \\ &\text{dérivée convection efflochage des} \\ &\text{particulaire tourbillons} \\ &+ A_s \{Lq^{\frac{1}{2}}(1/s^2)_{,k}\}_{,k} + A_{sq} \frac{1}{q} \left\{ \left( \frac{Lq^{\frac{1}{2}}}{s^2} \right) q_{,k} \right\}_{,k} \\ &\text{diffusion turbulente} \\ &- \Delta \frac{v}{s^4} + av \left( \frac{1}{s^2} \right)_{,kk} \\ &\text{augmentation de la taille diffusion} \\ &\text{moyenne des tourbillons moléculaire} \end{aligned} \quad (17)$$

2.3. Equation d'évolution de l'échelle intégrale

La seconde équation d'échelle décrit l'évolution de  $L$  définie par une relation analogue à celle utilisée par Rotta [6]:

$$L(\mathbf{x}, t) \sim \frac{1}{q} \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}(k, \mathbf{x}, t)}{k} dk \quad (18)$$

où  $\mathcal{E}(k, \mathbf{x}, t)$  représente le spectre moyen d'énergie turbulente.

D'une équation d'évolution pour

$$Q_{ij}(\xi, \mathbf{x}, t) = \overline{v_i(\mathbf{x} + \xi/2)v_j(\mathbf{x} - \xi/2)}$$

[13], on peut déduire une équation pour  $\mathcal{E}(k, \mathbf{x}, t)$  et compte tenu de (18) une équation pour l'échelle  $L$ . Des hypothèses de fermeture sont introduites, suggérées par l'interprétation physique des termes intégraux, et conduit à la forme proposée [12]:

$$\begin{aligned} \partial_t L + \bar{v}_j L_{,j} \\ &\text{dérivée convection} \\ &\text{temporelle} \\ &= \beta q^{\frac{1}{2}} + A_L (Lq^{\frac{1}{2}} L_{,j})_{,j} \\ &\text{source diffusion} \\ &\text{turbulente} \\ &- \beta v \frac{L}{s^2} + bv L_{,jj} \\ &\text{dissipation diffusion moléculaire.} \end{aligned} \quad (19)$$

Dans une turbulence homogène et isotrope  $L$  s'identifie à une échelle intégrale de corrélation longitudinale tandis que  $s\sqrt{10}$  s'identifie à la microéchelle transversale de Taylor.

2.4. Transfert de chaleur ou de masse par turbulence

Une équation de transport de l'enthalpie moyenne s'obtient par traitement statistique classique sur l'équation du bilan instantané d'énergie totale.

Considérant que dans les cas étudiés le problème thermique est largement conditionné par les flux de

diffusion moléculaire et turbulent, l'équation de  $\bar{H}$  s'écrit sous forme simplifiée:

$$\partial_t \bar{H} + \bar{v}_j \bar{H}_{,j} = \frac{\lambda}{\rho} \bar{T}_{,jj} - (\overline{H'v'_j})_{,j} \bar{H} = C_p \bar{T}. \quad (20)$$

L'hypothèse introduite sur le flux enthalpique turbulent  $\overline{H'v'_j} = -C_p D_t \bar{T}_{,j}$  fait intervenir la microéchelle  $s$  dans l'expression de la diffusivité thermique  $D_t$ :

$$D_t = A_0 \frac{s^2 q}{v}. \quad (21)$$

Ce schéma, qui fait apparaitre une distinction d'ordre fondamental entre mécanismes de diffusion de quantité de mouvement et de diffusion de chaleur, permet le calcul du nombre de Prandtl turbulent local dans les écoulements cisailés, cela sans hypothèse supplémentaire posée a priori dans chaque cas particulier.

$$Pr_t = \frac{v_t}{D_t} = -\frac{v R_{12}}{A_0 s^2 q \bar{v}_{1,2}}. \quad (22)$$

Une équation formellement identique à (20) décrit la diffusion d'un constituant dans un champ de concentration et la même hypothèse de base (21) pourra être utilisée dans ce cas pour évaluer le nombre de Schmidt turbulent.

2.5. Détermination des constantes universelles et formulation du modèle prévisionnel

Le modèle différentiel de turbulence est constitué par l'ensemble des équations (3), (4) et (20) qui décrivent le champ moyen ainsi que (15), (17) et (19) qui décrivent le champ fluctuant, compte tenu des conditions aux limites et initiales particulières à chaque cas étudié.

L'étude de quelques écoulements turbulents types tels que la décroissance de la turbulence derrière une grille, écoulement pariétal, écoulement à gradient de vitesse uniforme, permettent d'approcher quelques constantes des plus fondamentales. Les autres constantes sont obtenues par optimisation numérique effectuée sur quelques écoulements présentant des géométries assez variées telles que l'écoulement turbulent établi dans une conduite, et le jet plan turbulent.

Les valeurs finalement retenues pour l'ensemble des constantes sont retranscrites dans le tableau suivant:

$A_1 = 0,10$	$B_1 = 0,01$	$A_s = 0,18$	$A_{sq} = 0,05$	$A_2 = 0,08$
$\omega = 0,532$	$\zeta = 5,00$	$\beta = 0,40$	$\Delta = 1$	si $\varepsilon_t/v > 0,92$
$A_0 = 0,175$	$a = 0,80$	$b = 2,40$	$\Delta = 0,4$	si $\varepsilon_t/v < 0,92$
$\gamma = 0,30$	$\alpha = 0,30$	$\zeta = 0,10$	$\eta = 2,50$	$A_t = 0,175$

3. APPLICATION AUX CONDUITES RECTILIGNES A SECTION CONSTANTE

Dans les applications aux conduites rectilignes, les équations de transport de la turbulence, ont été rendues adimensionnelles par l'introduction de groupements construits sur  $h$  et  $v$ , et résolues numériquement, à l'aide d'une méthode itérative basée sur un schéma implicite de discrétisation [14] utilisée par Daly et Harlow [10].

Les conditions aux limites utilisées sont :

$$\bar{v}_1 = R_{ij} = L = s = 0 \text{ sur une paroi lisse.}$$

$$d\bar{v}_1 = dR_{11} = dR_{22} = dR_{33} = dL = ds = 0 \text{ et } R_{12} = 0 \text{ sur un axe de symétrie.}$$

$$T = 0 \text{ sur une paroi soumise à l'échange.}$$

$$dT = 0 \text{ sur un axe de symétrie ou une paroi isolée.}$$

Les conditions initiales ont été choisies proches en grandeur de celles observées expérimentalement dans une turbulence pleinement développée, cela afin de réduire le temps de calcul sur ordinateur. Le gradient de pression réduit  $\Gamma$  est considéré comme donnée du problème et a été fixé du départ. Les profils de vitesse et de température moyennes calculés sont utilisés pour évaluer les nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge et le nombre de Nusselt.

#### (a) *Écoulement turbulent entre plaques planes parallèles et tubes circulaires*

Ces écoulements simples, cas limites d'espaces annulaires lorsque  $r_1/r_2 \rightarrow 1$  et  $r_1/r_2 \rightarrow 0$ , et déjà étudiés dans le cadres des modèles simplifiés, ont été repris à l'aide de la formulation complète du modèle.

Plusieurs nombres de Reynolds ont été considérés proches de ceux étudiés par Laufer [15, 16] et Comte-Bellot [17]. Une assez bonne prévision des profils de vitesse moyenne sur toute la largeur de la conduite a été obtenu [12] et le modèle à l'avantage de fournir, de plus, toutes les corrélations doubles de Reynolds. L'allure générale des courbes, leur étagement les unes par rapport aux autres et les positions relatives des maximums sont retrouvés.

Les valeurs d'origine expérimentale du nombre de Prandtl turbulent  $v_t/D_t$  dans la région de paroi présentent une dispersion assez grande [18]. Cependant dans la zone des profils logarithmiques, la valeur couramment utilisée dans la pratique est légèrement inférieure à l'unité, les expériences récentes de Chen [19] ont conduit à la valeur  $Pr_t \simeq 0,885$  environ, valeur précisément très proche de celle calculée. Il est de plus remarquable, que le même modèle avait permis d'obtenir  $Pr_t \simeq 0,5$  dans les écoulements libres tels que jet plan [12] conformément à l'expérience.

Le calcul du transfert de chaleur à flux constant a été effectué pour divers nombres de Prandtl allant de 0,0154 à 1000 dans les tubes circulaires et les prévisions numériques dans ce dernier cas ont été trouvées en bon accord avec les formules classiques de Colburn et Dittus-Boelter. Des résultats tout à fait analogues ont été obtenus dans l'étude du transfert de chaleur dans l'écoulement entre plaques planes parallèles.

#### (b) *Convection turbulente dans les espaces annulaires*

La construction du modèle général trouve sa justification dans les études qu'il permet d'écoulements turbulents présentant des configurations plus complexes pour lesquelles il n'existe pas de procédure générale de prévision numérique. Le cas des espaces annulaires a été considéré. La présente étude s'attache à montrer, à travers l'illustration choisie, que le schéma

théorique général est capable de décrire des écoulements fortement dissymétriques ainsi que le transfert thermique associé.

(i) *Problème dynamique.* Les calculs ont été menés pour cinq valeurs du gradient de pression réduit  $\Gamma$  allant de  $7 \cdot 10^5$  à  $1,5 \cdot 10^8$ , ce qui correspond à une variation du nombre de Reynolds de 19000–380000 environ. Dans chaque cas, quatre valeurs de  $g = r_1/r_2$  ont été choisies 0,5–0,1–0,04–0,02, les trois dernières valeurs étant celles considérées dans l'article récent et très fouillé de Rehme [20]. Quelques cas de calcul ont également été traités [12] correspondant aux expériences de Brighton et Jones [21] pour des valeurs de  $g$  égales à 0,562 et 0,0625.

Les distributions de vitesse moyenne calculées ont été trouvées en très bon accord avec celles expérimentales contenues dans les articles précités. Les calculs font apparaître nettement que le rayon  $\hat{r}$  correspondant au maximum de vitesse est d'autant plus proche de la paroi intérieure que  $g$  est plus faible, cette position étant par ailleurs constatée différente de celle des profils laminaires.

Il apparaît sur les distributions logarithmiques de vitesse suivant chacune des deux parois que si la courbe relative à la paroi extérieure s'approche assez bien de la loi classique de Nikuradse  $v_1/v_* = 5,5 + 2,5 \log y_*$ , la validité de cette loi dite universelle ne semble pas s'étendre aux profils intérieurs lorsque  $g$  est faible.

La courbe de perte de charge présentée (Fig. 1) correspond au cas intermédiaire  $g = 0,1$ , elle est comparée à la loi classique de Blasius  $\lambda_* = 0,316 Re^{-1/4}$  (courbe 1) et à la loi limite supérieure  $\lambda_* = 0,348 Re^{-1/4}$  (courbe 2) donnée par Brighton et Jones. Les plages de variation de  $\lambda_*$  (en fonction de  $g$  allant de 0,02 à 0,5), portées sur la figure, correspondent à des écarts qui vont de 5,7 pour cent (pour  $Re = 19000$ ) à 3 pour cent (pour  $Re = 380000$ ) dans le même sens que  $g$ . Les prévisions numériques de  $\lambda_*$  apparaissent cependant légèrement supérieures (de 10 pour cent environ) à celles expérimentales obtenues par Rehme. Les distributions des corrélations doubles de vitesse présentent également une dissymétrie d'autant plus accusée que  $g$  est plus faible, et de plus les minimums ne se présentent pas exactement au même rayon.

On a constaté de plus sur les solutions numériques un écart entre les points d'annulation de la contrainte de turbulence (rayon  $r_0$ ) et le maximum de vitesse moyenne (au rayon  $\hat{r}$ ). Pour en montrer l'importance, les quantités  $s^*$  et  $\hat{s}$  ont été portées en fonction de  $g$  (Fig. 2). Les plages de variation de  $s^*$  et  $\hat{s}$  correspondent à la répartition des points en fonction du nombre de Reynolds, il apparaît donc que si  $r_0$  et  $\hat{r}$  dépendent fortement de  $g$ , l'influence de  $Re$  est faible et les points se situent bien autour des lois empiriques données par Kays et Leung [22] et Rehme [21].

Cette originalité due à la dissymétrie de l'écoulement a été constatée expérimentalement par Mathieu [23] puis Tailland et Mathieu [24] dans les jets pariétaux, ainsi que par Beguier [25] dans un jet dissymétrique confiné. Le même effet apparaît également dans les écoulements en conduite présentant une dissymétrie

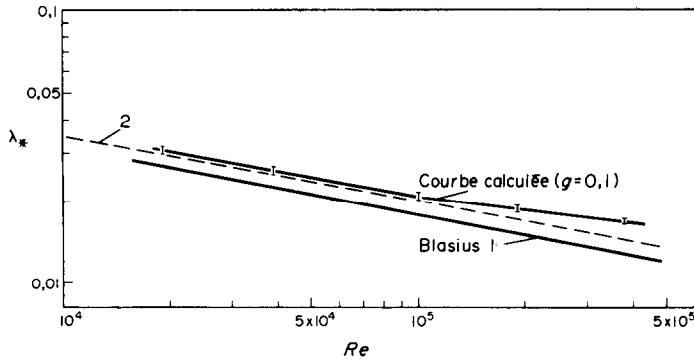


FIG. 1. Prévisions du coefficient de perte de charge.

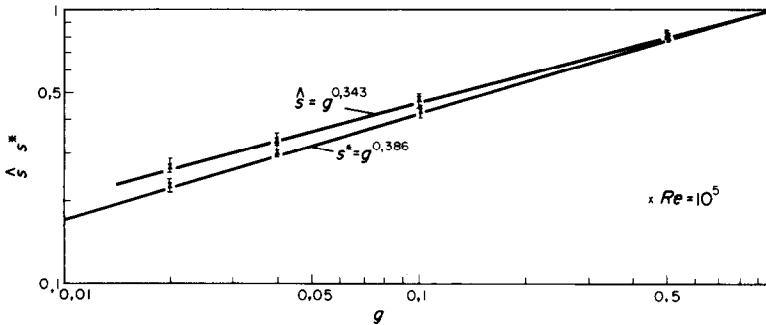


FIG. 2. Positions calculées du maximum de vitesse et du point d'annulation de la contrainte turbulente en fonction de  $g$ .

dû à la courbure ou à la rugosité, comme l'ont montré Maubach et Rehme [26] ainsi que Hanjalic et Launder [27] qui étudient l'écoulement entre plaques planes parallèles dont l'une est lisse et l'autre rugueuse.

Dans la zone dite "à production négative" d'énergie turbulente, comprise entre  $r_0$  et  $\hat{r}$ , le concept de viscosité turbulente tombe complètement en défaut. Le modèle général, utilisant des équations de transport des corrélations doubles, à l'avantage de pouvoir reproduire cette particularité de l'écoulement.

(ii) *Problème thermique.* L'étude thermique associée a permis le calcul du transfert de chaleur à flux constant sur une seule paroi, l'autre étant athermane. Une plage de nombres de Prandtl allant de 0,0154 (métal liquide) à 1000 a été balayée.

Les prévisions du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds sont portées sur les Figs. 3-6 pour chaque valeur de  $g$  considérée. Ces solutions correspondent à un chauffage de la paroi intérieure, la paroi extérieure étant maintenue isolée. Les résultats de transfert pariétal sont en bon accord avec les solutions expérimentales obtenues par Kays et Leung [22] dans les espaces annulaires pour un fluide ayant un nombre de Prandtl égal à 0,7. Dans tous les cas, également, le nombre de Prandtl turbulent, sur lequel aucune hypothèse n'est formulée a priori est trouvé proche de l'unité dans la région centrale de l'espace loin des parois et de la zone à "production négative" d'énergie turbulente. L'ensemble des résultats expérimentaux regroupés par Dalle Donne et Meerwald [28] se placent bien autour de la loi donnée par la corrélation de

Petukhov et Roizen :

$$Nu = 0,018(g)^{-0,16} Re^{0,8} Pr^{0,4} \tag{29}$$

Les présents résultats, malgré une certaine dispersion, se situent autour de la loi moyenne

$$Nu = 0,020(g)^{-0,14} Re^{0,8} Pr^{0,4} \tag{30}$$

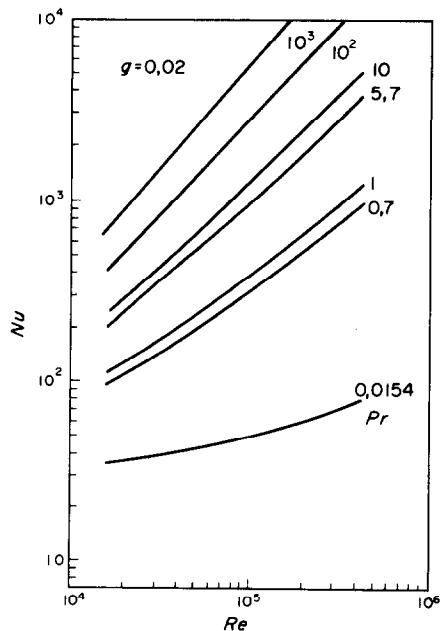


FIG. 3. Prévisions du transfert de chaleur sur la paroi intérieure du cylindre.

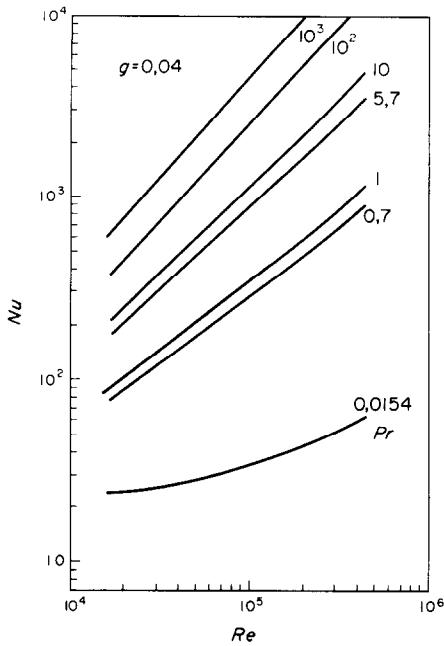


FIG. 4. Prévisions du transfert de chaleur sur la paroi intérieure du cylindre.

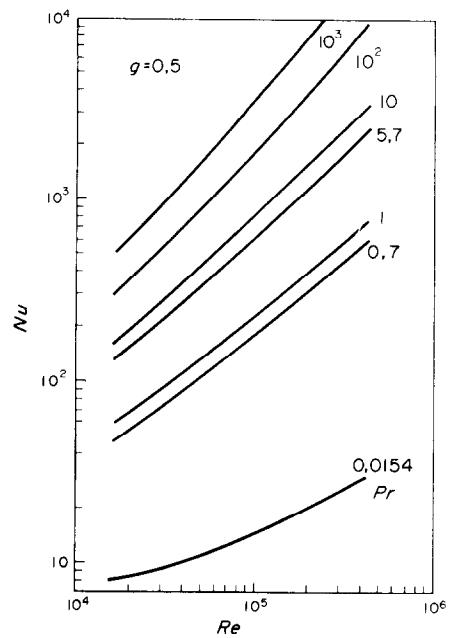


FIG. 6. Prévisions du transfert de chaleur sur la paroi intérieure du cylindre.

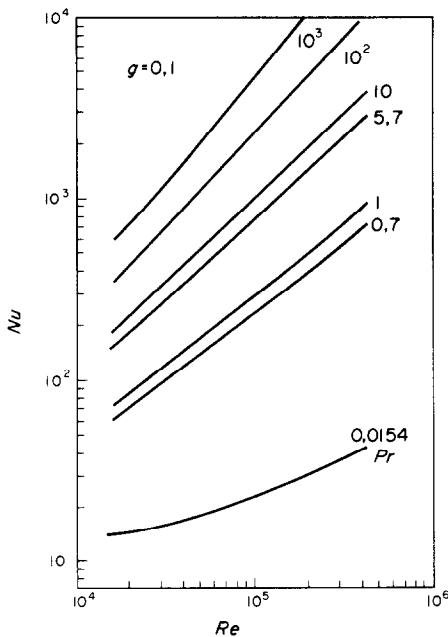


FIG. 5. Prévisions du transfert de chaleur sur la paroi intérieure du cylindre.

Il apparaît ainsi que l'influence non négligeable de  $g$  sur le nombre de Nusselt modifie ce dernier dans le rapport 1,7 lorsque  $g$  passe de 0,5 à 0,02.

Quelques cas de calcul, ont été effectués [12] avec transfert de chaleur sur la paroi extérieure seule, et ont montré que le nombre de Nusselt est dans ce cas inférieur à celui obtenu lorsque la paroi intérieure est seule chauffée.

#### CONCLUSION

Les hypothèses phénoménologiques introduites permettent de décrire de façon approchée le comportement du fluide en tenant compte des processus de production, de dissipation et de diffusion turbulente. La formulation du modèle est plus générale que les relations empiriques dérivées du concept de viscosité turbulente et se trouve ainsi, mieux à même de décrire des situations plus complexes. Ce caractère d'universalité ne peut être obtenu évidemment qu'au prix d'une grande complication d'écriture des équations et d'une augmentation du nombre des hypothèses et des constantes numériques.

Une fois fixé, le même jeu de constantes numériques a été conservé dans l'ensemble des applications présentées.

La principale originalité de la procédure proposée est l'introduction d'équations séparées pour deux échelles caractéristiques de la turbulence. Ces échelles une fois déterminées, le nombre de Prandtl turbulent peut être calculé en chaque point, au lieu d'être posé constant a priori, comme dans la plupart des procédures couramment employées actuellement.

Les résultats obtenus dans la description de l'écoulement turbulent dans un espace annulaire, montrent que le modèle tridimensionnel permet de considérer des écoulements présentant de fortes dissymétries, et rend compte de la zone dite à "production négative". Le modèle a permis de constater que le nombre de Nusselt sur le cylindre intérieur est plus sensible au paramètre  $g$  que le coefficient de perte de charge, et ses variations sont conformes aux résultats de Petukhov et Roizen.

Après cette confrontation assez favorable entre le modèle et les résultats expérimentaux pour les espaces annulaires on peut espérer pouvoir l'appliquer maintenant à d'autres cas très variés du domaine industriel.

## REFERENCES

1. J. Gosse et R. Schiestel, Modèle descriptif du mouvement turbulent d'un fluide isovolume, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **A275**, 471-474 (1972).
2. J. Gosse, R. Schiestel et M. G. Robin, A new model of turbulence applied to prediction of liquid metal heat transfer, ASME-AIChE Heat Transfer Conference, Atlanta, Ga (5-8 August 1973).
3. J. Gosse et R. Schiestel, The prediction of turbulent forced convection with a new model, 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, FC4-1 (3-7 September 1974).
4. R. Schiestel et J. Gosse, Prédiction numérique du phénomène de transition pour un écoulement entre deux plans parallèles, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **A275**, 1371-1374 (1972).
5. R. Schiestel et J. Gosse, Prédiction numérique de la convection turbulente dans les espaces annulaires, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **B279**, 543-546 (1974).
6. J. C. Rotta, Statistische theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.* **129**, 547-572; **131**, 51-77 (1951).
7. P. Y. Chou, On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuations, *Q. Appl. Math.* **3**, 198-209 (1945); Pressure flow of a turbulent fluid between two infinite parallel planes, *Q. Appl. Math.* **3**, 198-209 (1945).
8. D. Naot, Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses, *Physics Fluids* **16**(6), 738-743 (1973).
9. C. W. Hirt, Generalized turbulence transport equations, Int. Seminar of the Int. Centre for Heat and Mass Transfer, Herceg Novi, Yugoslavia (September 1969).
10. B. J. Daly et F. H. Harlow, Transport equations in turbulence, *Physics Fluids* **13**(11), 2634-2649 (1970).
11. K. Hanjalic et B. E. Launder, A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow, *J. Fluid Mech.* **52**(4), 609-638 (1972).
12. R. Schiestel, Sur un nouveau modèle de turbulence appliqué aux transferts de quantité de mouvement et de chaleur, Thèse Nancy, C.N.R.S. No. A.O. 10596 (1974).
13. J. O. Hinze, *Turbulence*, p. 256. McGraw-Hill, London (1959).
14. R. D. Richtmyer et K. W. Morton, *Difference Method for Initial Value Problems*, p. 198. Interscience, New York (1967).
15. J. Laufer, The structures of turbulence in fully developed pipe flow, N.A.C.A. TR. 1174 (1954).
16. J. Laufer, Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, N.A.C.A. TR. 1053 (1951).
17. G. Comte-Bellot, Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles, P.S.T. Min. Air. N° 419 (1965).
18. J. Blom, Experimental determination of the turbulent Prandtl number in a developing temperature boundary layer, Fourth Int. Heat Transfer Conf. Paris-Versailles, FC2-2 (1970).
19. C. P. Chen, Détermination expérimentale du nombre de Prandtl turbulent près d'une paroi lisse, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**(10), 1849-1862 (1973).
20. K. Rehme, Turbulent flow in smooth concentric annuli with small radius ratios, *J. Fluid Mech.* **64**, 263-287 (1974).
21. J. A. Brighton et J. B. Jones, Fully developed turbulent flow in annuli, *J. Bas. Engng* **86D**, 835-844 (1964).
22. W. M. Kays et E. Y. Leung, Heat transfer in annular passages, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 537-557 (1963).
23. J. Mathieu, Contribution à l'étude aérothermique d'un jet plan évoluant en présence d'une paroi, P.S.T. Min. Air No. 374 (1961).
24. A. Tailland et J. Mathieu, Jet pariétal, *J. Méc.* **6**(1), 103-131 (1967).
25. C. Beguier, Mesures des tensions de Reynolds dans un écoulement dissymétrique en régime turbulent incompressible, *J. Méc.* **4**(3), 319-334 (1965).
26. K. Maubach et K. Rehme, Négative eddy diffusivities for asymmetric turbulent velocity profiles? *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**(3), 425-432 (1972).
27. K. Hanjalic et B. E. Launder, Fully developed asymmetric flow in a plane channel, *J. Fluid Mech.* **51**(2), 301 (1972).
28. M. Dalle Donne et E. Meerwald, Heat transfer and friction coefficients for turbulent flow of air in smooth annuli at high temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**(4), 787-809 (1973).

## NUMERICAL PREDICTIONS FOR TURBULENT CONVECTION IN ANNULI

**Abstract**—A theoretical model, applied to annular passages, allows numerical prediction of momentum, heat and mass transfer in the turbulent flow. In particular, it accounts for the existence of a "negative production" zone. Nusselt number on the inner cylinder, is given versus a wide range of Prandtl numbers and for several values of the inner to outer radii ratio.

## NUMERISCHE ABSCHÄTZUNG DER TURBULENTEN KONVEKTION IN RINGRÄUMEN

**Zusammenfassung**—Ein theoretisches Modell wird auf Ringräume angewendet und gestattet die numerische Vorausberechnung von Impuls, Wärme- oder Stoffaustausch in turbulenter Strömung. Die "negative Produktionszone" wird besonders berücksichtigt. Die Nusselt-Zahl auf dem Innenzylinder wird für einen weiten Bereich der Prandtl-Zahlen und für verschiedene Werte des Verhältnisses Innenradius zu Außenradius der Rohre angegeben.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ  
В КОЛЬЦЕВЫХ КАНАЛАХ

**Аннотация** — Использование теоретической модели для кольцевых каналов позволяет рассчитывать перенос количества движения, тепла и массы для турбулентного течения. В частности, с ее помощью объясняется существование зоны «отрицательного порождения». Приводятся значения числа Нуссельта для внутреннего цилиндра в широком диапазоне чисел Прандтля и для различных отношений внутреннего радиуса к внешнему.